APLIKASI MATRIKS KOMPANION PADA PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN DIFERENSIAL LINIER NON HOMOGEN

TUGAS AKHIR

Diajukan sebagai Salah Satu Syarat
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains
pada Jurusan Matematika

Oleh:

ALCHA LIDYA NOMY
10854004311

UIN SUSKA RIAU

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SULTAN SYARIF KASIM RIAU
PEKANBARU
2013

APLIKASI MATRIKS KOMPANION PADA PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN DIFERENSIAL LINIER NON HOMOGEN

<u>ALCHA LIDYA NOMY</u>
10854004311

Tanggal Sidang: 26 Juni 2013
Periode Wisuda: 2013

Jurusan Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No.155 Pekanbaru

ABSTRAK

Sistem persamaan diferensial linier adalah suatu sistem yang terdiri dari beberapa persamaan diferensial linier. Dengan menggunakan operator D sistem persamaan diferensial dapat diubah ke dalam persamaan diferensial $a_n x^n + \cdots + a_1 x^{n-1} + a_{n-1} x' + a_n x = f\ x$. Jika $f\ x = 0$ maka disebut persamaan diferensial linier homogen dan jika $f\ x \neq 0$ disebut persamaan diferensial linier non homogen. Persamaan diferensial mempunyai hubungan dengan matriks kompanion, Matriks kompanion diperoleh dengan mentransformasikan persamaan diferensial linier orde n, yaitu $a_n \lambda^n + \cdots + a_1 \lambda^{n-1} + a_{n-1} \lambda' + a_n \lambda = f\ \lambda$. Sehingga diperoleh penyelesaian untuk sistem persamaan diferensial linier non homogen x_1, x_2, x_3, dan x_4 berupa suatu persamaan.

Katakunci: *Sistem persamaan diferensial linier, persamaan diferensial linier homogen, persamaan diferensial linier non homogen, operator D, matriks kompanion.*

KATA PENGANTAR

Syukur *alhamdulillah* penulis ucapkan kehadirat Allah SWT. yang telah melimpahkan *rahmat* dan *hidayah*-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir ini tepat pada waktunya. Tugas Akhir ini merupakan salah satu syarat kelulusan tingkat sarjana.

Petunjuk, bimbingan dan nasehat dari berbagai pihak telah banyak penulis terima dalam penulisan, penyusunan dan penyelesaian tugas akhir ini. Untuk itu sudah sepantasnya bila penulis mengucapkan terima kasih kepada kedua orang tua tercinta yang telah melimpahkan perhatian dan kasih sayang juga materi yang tak mungkin bisa terbalas. Selain itu, penulis juga mengucapkan terima kasih kepada:

1. Bapak Prof. Dr. H. M. Nazir Karim, MA selaku Rektor Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
2. Ibu Dra. Hj. Yenita Morena, M.Si selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
3. Ibu Sri Basriati, M.Sc. selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
4. Ibu Fitri Aryani, M.Sc. selaku pembimbing yang telah banyak membantu, mengarahkan, mendukung, dan membimbing penulis dalam penulisan tugas akhir ini.
5. Ibu Yuslenita Muda, M.Sc selaku penguji I serta penasehat akademis penulis, terima kasih telah memberikan saran dan kritik serta arahan kepada peulis.
6. Bapak M. Sholeh, M.Sc selaku penguji II terima kasih telah memberikan saran dan kritikannya dalam penulisan tugas akhir ini.
7. Bapak dan Ibu Dosen di lingkungan FST UIN SUSKA Riau, khususnya di Jurusan Matematika.
8. Teman-teman seperjuanganku jurusan Matematika 2008 yang penulis tidak bisa sebutkan namanya satu persatu, tetap berusaha sekuat tenaga jangan pernah putus asa.
9. Semua pihak yang telah memberi bantuan dari awal sampai selesai tugas akhir ini yang tidak bisa disebutkan satu persatu.

Penulis telah berusaha semaksimal mungkin dalam penyusunan tugas akhir ini penulis. Walaupun demikian, tidak tertutup kemungkinan adanya kesalahan dan kekurangan baik dalam penulisan maupun dalam penyajian materi. Untuk itu, penulis mengharapkan kritik dan saran dari berbagai pihak demi kesempurnaan tugas akhir ini.

Pekanbaru, 26 Juni 2013

Alcha Lidya Nomy

DAFTAR ISI

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Sistem persamaan linier adalah suatu model matematika yang melibatkan beberapa persamaan linier. Sistem persamaan linier banyak dijumpai dibidang statistik, fisika, biologi, ilmu-ilmu sosial, dan bisnis, sehingga membutuhkan proses penyelesaian. Menyelesaikan suatu sistem persamaan linier adalah mencari nilai-nilai variabel yang memenuhi semua persamaan linier yang diberikan. Sistem persamaan linier biasanya terdiri atas *m* persamaan dan *n* variabel.

Seiring perkembangan ilmu matematika, sistem persamaan linier dapat diperluas ke dalam bentuk sistem persamaan diferensial linier. Sistem persamaan diferensial muncul dari beberapa kasus dibidang sains, seperti sistem getaran mekanik, rangkaian listrik yang terdiri dari beberapa loop, dan gerakan revolusi planet-planet dalam tata surya. Sistem persamaan diferensial terdiri dari beberapa persamaan diferensial linier. Suatu sistem persamaan diferensial linier orde satu dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{array}{l} dx_1\ t\ /dt = a_{11}\ t\ x_1 + a_{12}\ t\ x_2 + \cdots + a_{1n}\ t\ x_n + f_1\ t \\ dx_2\ t\ /dt = a_{21}\ t\ x_1 + a_{22}\ t\ x_2 + \cdots + a_{2n}\ t\ x_n + f_2\ t \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\ dx_n\ t\ /dt = a_{nn}\ t\ x_1 + a_{nn}\ t\ x_2 + \cdots + a_n\ t\ x_n + f_i\ t \end{array}$$

Jika $f_i\ t = 0$, maka sistem persamaan linier disebut homogen, sebaliknya jika fungsi $f_i\ t \neq 0$, maka sistem persamaan diferensial adalah nonhomogen. Penyelesaian sistem persamaan diferensial linier dilakukan secara simultan. Dengan metode tertentu, suatu sistem persamaan diferensial dapat diubah ke dalam bentuk persamaan diferensial linier. Persamaan diferensial linier berkaitan dengan matriks kompanion, yang mana matriks kompanion dapat diperoleh dengan cara mentransformasikan persamaan diferensial linier orde n.

Matriks kompanion adalah matriks yang seluruh superdiagonal utamanya adalah satu dan elemen $a_{ni} = -a_{n-(i-1)}$, dimana $i = 1,2,3,..n$ dan yang lainnya adalah nol (Louis Brand,1964). Matriks kompanion berukuran $n \times n$ dengan simbol C didefenisikan sebagai berikut:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

Sebelumnya penelitian mengenai penyelesaian persamaan diferensial telah banyak diteliti oleh beberapa peneliti, diantaranya Muasisul Khoirot (2007) dengan judul skripsi Menyelesaikan Persamaan Diferensial Tak Homogen dengan Mengkonstruksi Fungsi Green, selanjutnya penelitian yang dilakukan oleh Rila Dwi Rahmawati (2007) dengan judul skripsi Solusi Sistem Persamaan Diferensial Non Linier Menggunakan Metode Euler Berbantuan Program Matlab. Kemudian, Zurnida R (2009) dengan mengaplikasikan matriks kompanion pada persamaan diferensial dengan judul skripsi Penyelesaian Persamaan Diferensial Linier Non Homogen dengan Matriks Companion.

Berdasarkan penelitian-penelitian yang telah dilakukan peneliti sebelumnya, penulis tertarik untuk melakukan penelitian mengenai **"Aplikasi Matriks Kompanion pada Penyelesaian Sistem Persamaan Diferensial Linier Non Homogen"**.

1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah yang akan dibahas pada tugas akhir ini adalah "Bagaimana bentuk aplikasi matriks kompanion pada penyelesaian sistem persamaan diferensial linier non homogen?"

1.3 Batasan Masalah

Supaya penelitian tugas akhir ini mencapai tujuan yang diinginkan, penulis membatasi permasalahan penelitian yaitu penyelesaian sistem persamaan diferensial linier non homogen 3 persamaan dengan 3 variabel dan 4 persamaan dengan 4 variabel.

1.4 Tujuan Penelitian

Penelitian ini bertujuan mengaplikasikan matriks kompanion pada penyelesaian sistem persamaan diferensial linier non homogen untuk 3 persamaan dengan 3 variabel dan sistem persamaan diferensial linier untuk 4 persamaan dengan 4 variabel.

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat penelitian ini sebagai berikut:

1. Penulis mengharapkan dapat mengembangkan wawasan pada bidang aljabar khususnya mengenai matriks kompanion.
2. Penulis dapat mengetahui lebih banyak mengenai materi tentang sistem persamaan diferensial linier yang berhubungan dengan matriks.

1.6 Sistematika Penulisan

Sistematika dalam penulisan tugas akhir ini mencakup lima bab:

BAB I Pendahuluan

Bab ini berisikan latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian dan manfaat penelitian.

BAB II Landasan Teori

Bab ini berisikan teori-teori yang mendukung matriks kompanion, vektor eigen, sistem persamaan diferensial, dan lain-lain.

BAB III Metodologi Penelitian

Bab ini berisikan tentang langkah-langkah penelitian yang digunakan dalam penulisan tugas akhir ini.

BAB VI Pembahasan

Bab ini berisikan mengenai aplikasi matriks kompanion pada penyelesaian sistem persamaan diferensial non homogen.

BAB V Penutup

Bab ini berisi tentang kesimpulan dan saran.

BAB II

LANDASAN TEORI

Pada bab II ini penulis akan menjelaskan teori-teori yang mendukung untuk menyelesaikan sistem persamaan diferensial linier non homogen dengan aplikasi matriks kompanion. Adapun teori pendukungnya sebagai berikut:

2.1 Matriks

Sebelum melakukan operasi matriks dan mencari nilai determinan matriks, kita perlu mengetahui definisi matriks terlebih dahulu.

Definisi 2.1 (Howard Anton, 1998): Sebuah matriks adalah susunan segiempat siku-siku dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan dalam susunan tersebut dinamakan entri dalam matriks. Berikut ini akan diberikan beberapa contoh matriks yaitu :

a) Matriks bujur sangkar adalah matriks yang banyak baris sama dengan banyak kolomnya. Misalnya matriks berukuran 3×3 sebagai berikut:

$$A = \begin{matrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -3 & 4 \\ 4 & 5 & 1 \end{matrix}.$$

b) Matriks identitas adalah matriks yang elemen-elemen pada diagonal utamanya satu. Misalnya matriks berukuran 3×3 sebagai berikut:

$$A = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}.$$

c) Matriks segitiga atas adalah matriks bujur sangkar yang elemen-elemen di bawah diagonal utamanya bernilai nol. Misalnya sebagai berikut:

$$A = \begin{matrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 9 \end{matrix}.$$

d) Matriks segitiga bawah adalah matriks bujur sangkar yang elemen-elemen di atas diagonal utamanya bernilai nol. Misalnya sebagai berikut:

$$A = \begin{matrix} -3 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 0 \\ -1 & 2 & -7 \end{matrix}.$$

2.2 Determinan Matriks

Definisi 2.2 (Howard Anton, 1998) Misalkan A adalah matriks bujursangkar. Fungsi determinan dinyatakan oleh *det*, dan kita defenisikan det(A) sebagai hasil kali elementer dari A.

Untuk matriks berukuran 2×2 *det* (A) dapat dicari dengan:

$$det \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

sedangkan untuk matriks berukuran 3×3 *det* (A) didefenisikan sebagai berikut:

$$det \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Selain cara di atas, determinan sebuah matriks dapat dihitung dengan mereduksi matriks tersebut pada bentuk eselon baris. Dengan merubah matriks $n\,x\,n$ menjadi matriks segitiga atas (*upper triangular*) atau menjadi matriks segitiga bawah (*lower triangular*). Metode ini digunakan untuk menghindari perhitungan panjang yang terlibat dalam penerapan defenisi determinan secara langsung.

Contoh 2.1

Hitunglah determinan matriks di bawah ini dengan mereduksi matriks tersebut pada bentuk eselon baris.

$$A = \begin{matrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{matrix}$$

Penyelesaian:

$$\det\ A = \begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{matrix}$$

baris pertama ditukar pada baris kedua.

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{matrix}$$

$-\frac{1}{2}$ kali baris ketiga ditambah baris keempat, kemudian -2 kali baris pertama tambahkan pada baris kedua.

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3/2 & 3 \end{matrix}$$

-2 kali baris kedua tambahkan baris ketiga, kemudian $\frac{3}{2}$ kali baris ketiga tambahkan baris keempat.

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{matrix}$$

Setelah melakukan reduksi baris, maka diperoleh matriks segitiga atas dengan entri diagonal utama $a_{11} = 1, a_{22} = 1, a_{33} = -1, a_{44} = 6$, sehingga det A = $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} = \ 1 \ \ 1 \ \ -1 \ \ 6 \ = -6$.

2.3 Invers Matriks

Definisi 2.3 (Howard Anton, 1998) Jika A adalah matriks bujursangkar,dan jika kita dapat mencari matriks A^{-1} sehingga $AA^{-1} = A^{-1}A = I$, maka A dikatakan dapat dibalik *(invertible)* dan A^{-1} dinamakan invers dari A.

Contoh 2.2

Diberikan sebuah matriks

$$A = \begin{matrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{matrix}.$$

Carilah invers dari matriks A tersebut dengan menggunakan operasi baris elementer.

Penyelesaian:

Matriks A di atas dapat dibentuk

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}.$$

Tambahkan -2 kali baris pertama pada baris kedua dan -4 kali baris pertama ke baris ketiga.

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \end{matrix}.$$

Pertukar baris kedua dengan baris ketiga, kemudian tambahkan 1 kali baris kedua pada baris ketiga.

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -5 & 1 & 1 \end{matrix}.$$

Tambahkan -2 kali baris ketiga pada baris pertama.

$$\begin{matrix} -1 & 0 & 0 & 11 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -5 & 1 & 1 \end{matrix}.$$

Kalikan -1 pada baris pertama.

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & -11 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -5 & 1 & 1 \end{matrix}.$$

Tambahkan -1 kali baris pertama pada baris ketiga.

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & -11 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 1 & 1 \end{matrix}.$$

Sehingga

$$A^{-1} = \begin{matrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & 1 & 1 \end{matrix}.$$

2.4 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Berikut akan dijelaskan mengenai nilai eigen dan vektor eigen dari suatu matriks.

Definisi 2.4 (Howard Anton, 1998) Jika A adalah matriks $n \ x \ n$, maka vektor tak nol x di R^n dinamakan vektor eigen *(eigenvector)* dari A jika Ax adalah kelipatan skalar dari x, yakni

$$Ax = \lambda x \qquad (2.1)$$

dengan λ adalah suatu skalar. Skalar λ dinamakan nilai eigen *(eigenvalue)* dari A dan x dikatakan vektor eigen yang bersesuaian dengan λ

Contoh 2.3

Misalkan diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$, maka vektor eigen dari matriks A adalah $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Sesuai dengan persamaan $Ax = \lambda x$

$$Ax = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = 3x$$

sehingga nilai eigen λ yang bersesuaian dengan vektor eigen $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ dari sebuah matriks A adalah $\lambda = 3$.

Untuk mencari nilai eigen dari sebuah matriks yang berukuran $n \times n$ maka dapat dituliskan kembali sebagai

$$Ax = \lambda I x \tag{2.2}$$

atau secara ekivalen

$$(\lambda I - A)x = 0 \tag{2.3}$$

agar λ menjadi nilai eigen, maka harus ada penyelesaian tak nol dari persamaan (2.3). Penyelesaian tersebut diperoleh jika

$$det(\lambda I - A) = 0 \tag{2.4}$$

yang dinamakan persamaan karakteristik A, skalar yang memenuhi persamaan ini adalah nilai eigen dari A. Bila diperluas, maka $det(\lambda I - A)$ adalah polinom λ yang kita namakan polinom karakteristik A.

Contoh 2.4

Carilah nilai-nilai eigen dari matriks

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

Karena $det(\lambda I - A) = 0$

sehingga $det\left(\lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}\right) = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -1 & -1 \\ -2 & \lambda - 4 & -2 \\ -1 & -1 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = 0$

maka polinom karakteristik dari A adalah:

$$det\ \lambda I - A = det \begin{bmatrix} \lambda - 3 & -1 & -1 \\ -2 & \lambda - 4 & -2 \\ -1 & -1 & \lambda - 3 \end{bmatrix} = \lambda^3 - 10\lambda^2 - 28\lambda - 24 = 0$$

dan persamaan karakteristik dari A adalah:

$$\lambda^3 - 10\lambda^2 - 28\lambda - 24 = 0$$

dengan menggunakan metode faktorisasi maka penyelesaian persamaan polinomial diatas adalah $(\lambda_1 - 2)(\lambda_2 - 2)\ (\lambda_3 - 6)$, sehingga $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, dan $\lambda_3 = 6$ inilah nilai-nilai eigen dari A.

2.5 Matriks Kompanion

Polinomial monik adalah sebuah polinomial yang berbentuk

$$a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$$

dengan koefisien a_n adalah 1. Matriks kompanion mempunyai hubungan erat dengan polinomial monik yaitu:

$$P(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \lambda^n$$

dan didefenisikan sebagai matriks

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

Definisi 2.5 (Louis Brand, 1964) Matriks kompanion adalah matriks yang seluruh elemen superdiagonal utamanya adalah satu dan elemen $a_{ni} = -a_{n-(i-1)}$ dimana $i = 1,2,\dots,n$ dan yang lainnya adalah nol. Matriks C disebut juga matriks kompanion dari polinomial $P(\lambda)$. Dengan polinomial karakteristik

$$P(\lambda) = det(C - \lambda I)$$

dan persamaan karakteristiknya adalah $P(\lambda) = 0$.

2.6 Sistem Persamaan Diferensial Linier

Suatu sistem persamaan diferensial linier terdiri dari dua atau lebih persamaan diferensial linier. Penyelesaian sistem persamaan diferensial dilakukan secara simultan. Perhatikan sistem persamaan diferensial linier orde satu berikut ini:

$$dx_1\ t\ /dt = a_{11}\ t\ x_1 + a_{12}\ t\ x_2 + \cdots + a_{1n}\ t\ x_n + f_1\ t\ \ .(1)$$
$$dx_2(t)/dt = a_{21}\ t\ x_1 + a_{22}\ t\ x_2 + \cdots + a_{2n}\ t\ x_n + f_2\ t\ \ .(2)$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$dx_n(t)/dt = a_{nn}\ t\ x_1 + a_{nn}\ t\ x_2 + \cdots + a_n\ t\ x_n + f_i\ t\ \ ..(n)$$

jika koefisien $a_{ij}(t)$ adalah konstanta maka sistem persamaan linier disebut sebagai sistem persamaan diferensial linier dengan koefisien konstanta. Kemudian jika $f_i\ t\ = 0$, maka sistem persamaan diferensial linier disebut homogen, sebaliknya jika $f_i(t) \neq 0$, maka sistem persamaan diferensial linier disebut non homogen.

Contoh 2.5

Di bawah ini akan diberikan contoh sistem persamaan diferensial linier homogen dan sistem persamaan diferensial linier non homogen.

a) Sistem persamaan diferensial linier homogen.

$x_1' - 3x_1 + 4x_2 = 0$ .... (1)

$-4x_1 + x_2' + 7x_2 = 0$ .... (2)

b) Sistem persamaan diferensial non homogen.

$x_1' + x_2 = t$ .... (1)

$2x_1 + x_2' - 3x_2 = 0$ .... (2)

2.7 Operator D

Operator D^n sering digunakan untuk melambangkan turunan ke-n suatu fungsi y yang ditulis

$$D^n y = \frac{d^n y}{dx^n}$$

sehingga suatu persamaan diferensial linier dengan koefisien konstan

$$a_n y^n + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = g(x)$$

dan dapat ditulis kembali

$$a_n D^n y + a_{n-1} D^{n-1} y + \cdots + a_2 D^2 y + a_1 D y + a_0 y = g\ x\ .$$

Bentuk dari

$$a_nD^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_2D^2 + a_1D + a_0$$

disebut operator persamaan diferensial orde-n linier. Misalkan $y = f(x)$ adalah sebuah fungsi yang mempunyai n derivatif, jika

$$a_nD^nf(x) + a_{n-1}D^{n-1}f(x) + \cdots + a_2D^2f(x) + a_1Df(x) + a_0f(x) = 0$$

maka operator

$$a_nD^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_2D^2 + a_1D + a_0$$

disebut pembuat nol f.

2.8 Penyelesaian Persamaan Diferensial Linier Homogen

Sebuah persamaan diferensial linier homogen orde ke-n memiliki bentuk:

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x' + a_0x = 0$$

dengan notasi x^n menyatakan turunan ke-n. Misalkan $x_1, x_2, \ldots, x_n$ adalah n buah penyelesaian dari persamaan diferensial diatas, maka solusi umum untuk persamaan diferensial linier homogen adalah:

$$x = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

dengan $c_1, c_2, \ldots, c_n$ konstanta-konstanta sembarang.

Persamaan diferensial $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x' + a_0x = 0$ mempunyai polinomial karakteristik $\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda' + a_0\lambda = 0$. Suatu persamaan polinomial karakteristik mempunyai penyelesaian yang disebut akar-akar karakteristik. Berkaitan dengan akar-akar karakteristik, berikut akan dijabarkan mengenai akar-akar karakteristik:

Kasus 2.1 (Richard Bronson, 2007). Apabila λ_1 dan λ_2 adalah real dan berbeda, dua solusi penyelesaian yang bebas linier adalah $e^{\lambda_1 t}$ dan $e^{\lambda_2 t}$ sehingga penyelesaian umumnya adalah

$$x = c_1e^{\lambda_1 t} + c_2e^{\lambda_2 t}$$

Kasus 2.2 (Richard Bronson, 2007). Apabila $\lambda_1 = \lambda_2$ adalah sama, maka dua solusi yang bebas linier adalah $e^{\lambda_1 t}$ dan $xe^{\lambda_1 t}$ dan penyelesaian umumnya adalah

$$x = c_1e^{\lambda_1 t} + xc_1e^{\lambda_1 t}$$

Kasus 2.3 (Richard Bronson, 2007). Apabila $\lambda_1 = a + i\beta$ dan $\lambda_2 = a - i\beta$ adalah bilangan kompleks, dua solusi yang bebas linier adalah $e^{(a+i\beta)t}$ dan $e^{(a-i\beta)t}$, dan solusi kompleks umumya adalah

$$x = C_1 e^{a+i\beta} + C_2 e^{a-i\beta}$$

yang secara aljabar euivalen dengan

$$x = c_1 e^{ax} \cos \beta t + c_2 e^{ax} \sin \beta t.$$

2.9 Penyelesaian Persamaan Diferensial Linier Non Homogen

Bentuk umum persamaan diferensial linier non homogen orde n adalah:

$$a_n x^n + \cdots + a_1 x^{n-1} + a_{n-1} x' + a_n x = f(x)$$

Penyelesaian umum dari persamaan diferensial linier non homogen adalah jumlah dari penyelesaian diferensial homogen yang bersesuaian dan penyelesaian khusus dari persamaan diferensial non homogennya.

Misalkan $x_h = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n$ merupakan penyelesaian umum dari persamaan diferensial linier homogen, dimana c_i konstanta sebarang, dan jika x_p suatu penyelesaian khusus dari persamaan diferensial linier non homogen, maka penyelesaian khusus dari persamaan diferensial linier non homogen adalah:

$$x = x_h + x_p = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n + x_p$$

2.10 Bentuk Normal Jordan

Misalkan suatu matriks kompanion C mempunyai nilai eigen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ dan vektor eigen $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Suatu matriks yang elemen-elemennya terdiri atas vektor eigen C sebagai kolom yakni:

$$B = \quad e_1, e_2, \ldots, e_n \quad .$$

maka matriks

$$B^{-1} C B = J$$

disebut bentuk Normal Jordan dari matriks kompanion C.

BAB III
METODOLOGI PENELITIAN

Penulisan tugas akhir dilakukan dalam bentuk studi literatur dari berbagai buku teks dan jurnal yang bertujuan untuk mengumpulkan data dan informasi yang digunakan dalam penelitian.

Langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini sebagai berikut:

1. Menentukan sistem persamaan diferensial linear non homogen dengan n persamaan dan n variabel.

   $dx_1\ t\ /dt = a_{11}\ t\ x_1 + a_{12}\ t\ x_2 + \cdots + a_{1n}\ t\ x_n + f_1\ t$ ......(1)

   $dx_2(t)/dt = a_{21}\ t\ x_1 + a_{22}\ t\ x_2 + \cdots + a_{2n}\ t\ x_n + f_2\ t$ ......(2)

   $\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

   $dx_n(t)/dt = a_{nn}\ t\ x_1 + a_{nn}\ t\ x_2 + \cdots + a_n\ t\ x_n + f_i\ t$ ....(n)
2. Mengubah sistem persamaan diferensial non homogen ke dalam bentuk operator *D*.
3. Mengeliminasi sistem persamaan diferensial menjadi persamaan diferensial linier non homogen.
4. Membentuk matriks kompanion dari persamaan diferensial linier nonhomogen.

$$C = \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{matrix}$$

5. Mencari nilai eigen dan vektor eigen yang bersesuain dengan matriks C.
6. Mencari vektor eigen generalized apabila terdapat nilai eigen yang sama.
7. Dibentuk matriks B yang elemen-elemennya terdiri dari vektor eigen matriks C.
8. Mencari invers matriks B.
9. Menentukan bentuk normal jordan dengan persamaan $B^{-1}CB = J$.
10. Mencari nilai matriks $sI - J$.
11. Mencari invers matriks $sI - J^{-1}$.

12. Mencari $x_h(s)$ subsitusikan ke dalam persamaan $x_h(s) = B(sI - J)^{-1}x(0)$.
13. Transformasikan $x_h(s) = B(sI - J)^{-1}x(0)$ ke dalam invers transformasi Laplace.
14. Diperoleh penyelesaian umum $x_h(t)$ untuk persamaan diferensial linier homogen.
15. Mencari $x_p(s)$ dengan mensubsitusikan persamaan

$$x_p(s) = B(sI - J)^{-1}g(t)$$

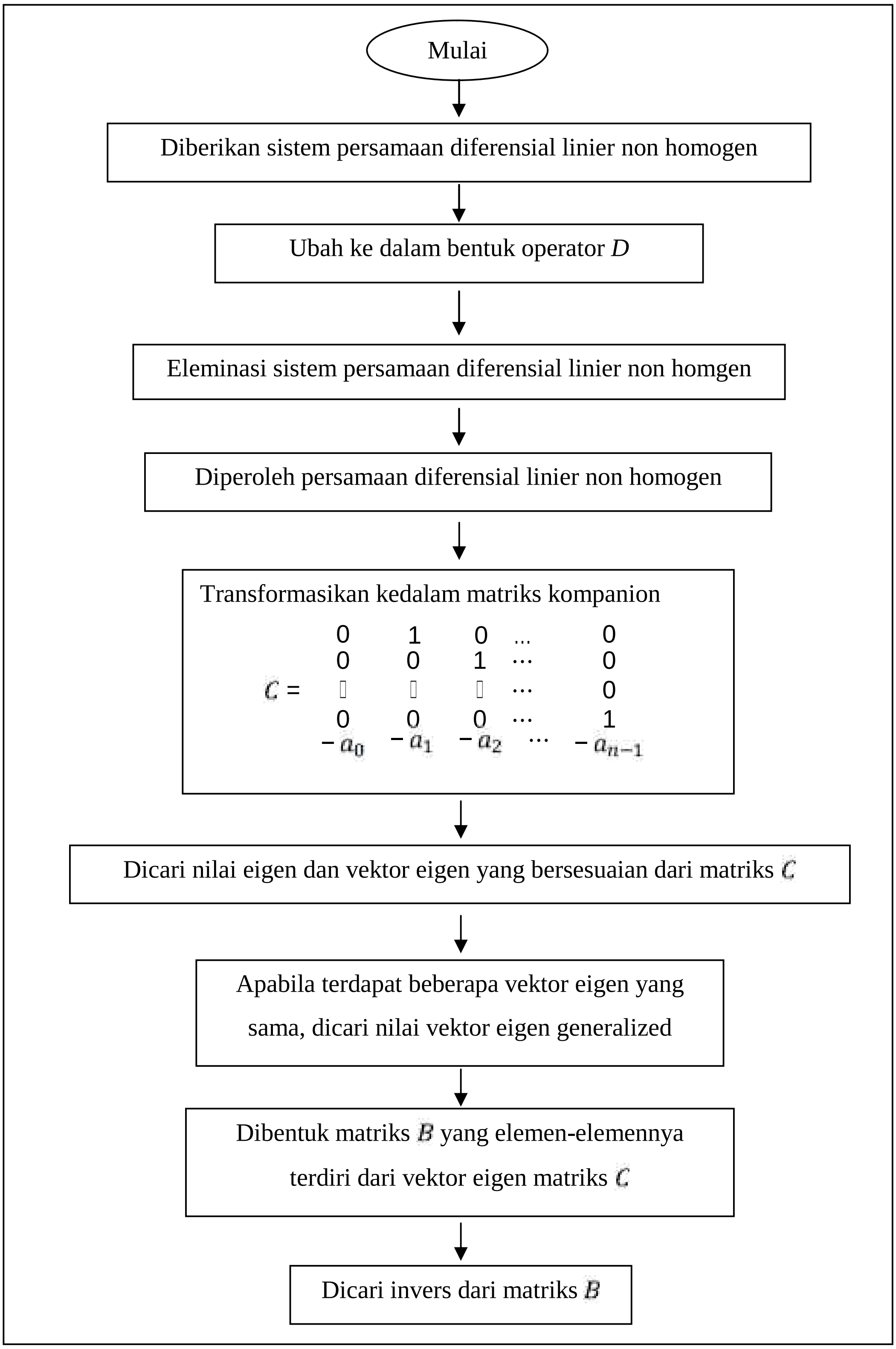
16. Transformasikan $x_p(s) = B(sI - J)^{-1}g(t)$ ke dalam invers transformasi Laplace.
17. Diperoleh penyelesaian umum $x_p(t)$ untuk persamaan diferensial linier homogen.
18. Menjumlahkan solusi umum $x_h(t)$ dan solusi umum sehingga $x_p(t)$ penyelesaian khususnya:

$$x = x_h(t) + x_p(t) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n + x_p$$

19. Subsitusika kembali ke dalam sistem persamaan diferensial linier non homogen.
20. Selanjutnya diperoleh solusi untuk sistem persamaan diferensial linier non homogen.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \cdots + c_{1n}x_{1n} + x_{1p} \\ c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + \cdots + c_{2n}x_{2n} + x_{2p} \\ \vdots \\ c_{n1}x_{n1} + c_{n2}x_{n2} + \cdots + c_nx_n + x_{np} \end{pmatrix}$$

Prosedur langkah-langkah penelitian ini dapat digambarkan dalam *flow chart* berikut:



↓

Bentuk ke dalam matriks Normal Jordan $B^{-1}CB = J$

↓

Dicari nilai dari matriks $sI - J$

↓

Dicari nilai dari matriks $(sI - J)^{-1}$

↓

Masukkan kedalam persamaan

$x_h(s) = B(sI - J)^{-1}x(0)$

↓

Transformasikan $x_h(s)$ ke dalam bentuk invers transformasi Laplace

↓

Diperoleh penyelesaian umum untuk persamaan diferensial linier homogen

↓

Dicari $x_p(s)$ dengan menggunakan persamaan

$x_p(s) = B(sI - J)^{-1}g(t)$

↓

Transformasikan $x_p(s)$ ke dalam bentuk invers transformasi Laplace

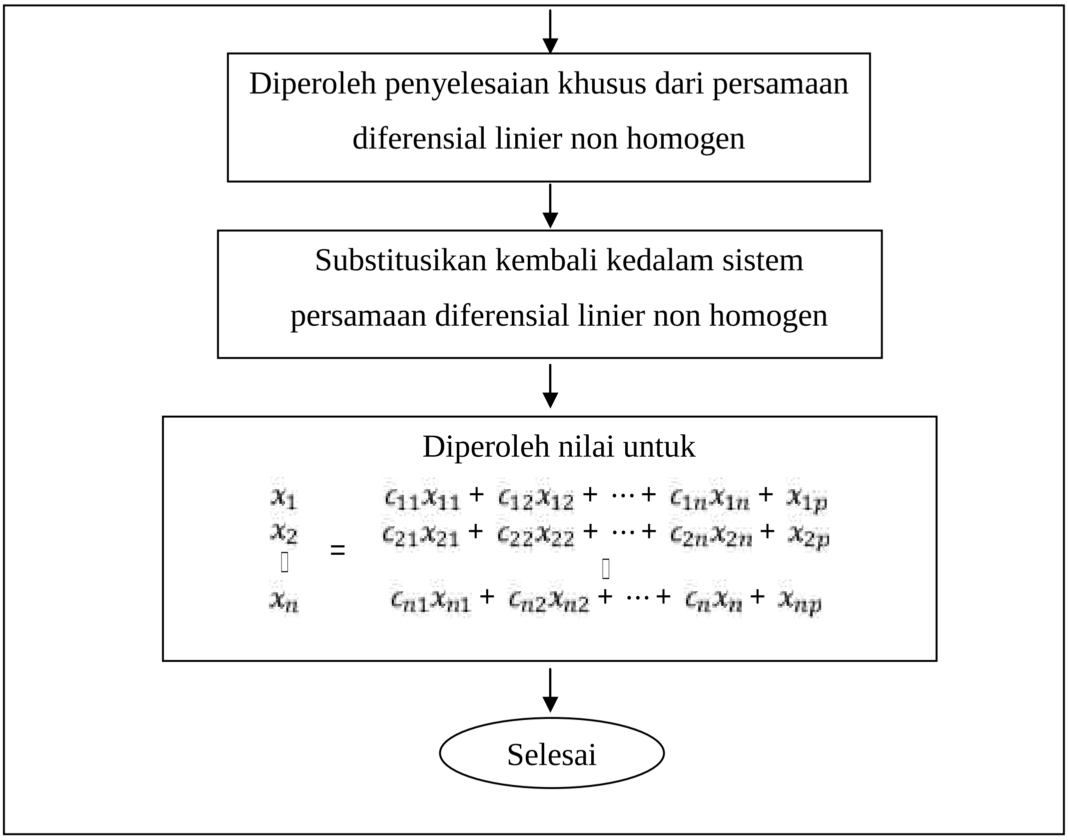
↓

Diperoleh penyelesaian dari persamaan diferensial linier non homogen

↓

Jumlahkan persamaan

$x_h(s) + x_p(s)$



Gambar 3.1 ***flow chart*** **Prosedur Penelitian**

BAB IV
PEMBAHASAN DAN HASIL

Bab IV ini akan membahas mengenai penyelesaian sistem persamaan diferensial linier non homogen dengan aplikasi matriks kompanion. Akan tetapi terlebih dahulu akan dibahas tentang vektor eigen matriks kompanion, vektor eigen generalized, transformasi laplace, penyelesaian persamaan diferensial linier homogen dan non homogen dengan matriks kompanion.

4.1 Vektor Eigen Matriks Kompanion

Vektor eigen matriks kompanion C dapat ditulis:

$$Ce(\lambda) = \lambda e(\lambda) \tag{4.1}$$

dimana λ adalah nilai eigen dan $e(\lambda)$ adalah vektor eigen yang bersesuaian dengan λ. Sehingga persamaan diatas dapat ditulis:

$$C - \lambda I \;\; e \;\lambda = 0.$$

Polinomial karakteristik dari matriks kompanion C adalah

$$det(C - \lambda I) = 0$$

Selain nilai eigen dan vektor eigen di atas, matriks kompanion juga mempunyai nilai eigen dan vektor eigen yang berbeda, seperti yang dijelaskan dalam teorema berikut.

Teorema 4.1 Jika polinomial $f(\lambda)$ berderajat n mempunyai m nilai eigen λ_i yang berbeda dengan $m \leq n$, maka nilai eigen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ dari matriks kompanionnya mempunyai tepat m vektor eigen, yaitu:

$$e_i = [1, \lambda_i, \lambda_i^2 \ldots, \lambda_i^{n-1}]^T, \text{ dimana } i = 1,2, \ldots, m$$

Bukti:

Misalkan $e_i = e(\lambda_i)$ adalah vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen λ_i, ditulis

$$e_i = [w_1, w_2, \ldots, w_n]^T$$

Persamaan $Ce(\lambda) = \lambda e(\lambda)$ dapat ditulis kembali dalam bentuk matriks sebagai berikut

$$
\begin{matrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 & -a_2 \end{matrix} \quad \begin{matrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_{n-1} \\ w_n \end{matrix} = \lambda_i \begin{matrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_{n-1} \\ w_n \end{matrix}
$$

Dengan mengoperasikan persamaan matriks diatas, maka diperoleh

$$
\begin{aligned}
&w_2 = \lambda_i w_1 \\
&w_3 = \lambda_i w_2 \Rightarrow w_3 = \lambda_i^2 w_1 \\
&w_4 = \lambda_i w_3 \Rightarrow w_4 = \lambda_i^3 w_1 \\
&\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\
&w_n = \lambda_i w_{n-1} \Rightarrow w_n = \lambda_i^n w_1 \\
&-a_n w_1 - a_{n-1} w_2 - \cdots a_2 w_{n-1} - a_1 w_n = \lambda_i w_n
\end{aligned}
$$

atau

$$\lambda_i + a_1 \ w_n + a_2 w_{n-1} + \cdots + a_{n-1} w_2 + a_n w_1 = 0 \qquad (4.2)$$

subsitusikan nilai-nilai $w_2, w_3, \ldots, w_n$ kedalam persamaan (4.2), sehingga diperoleh

$$\lambda_i^n w_1 + a_1 \lambda_i^{n-1} w_1 + a_2 \lambda_i^{n-1} w_1 + \cdots + a_{n-1} \lambda_i w_1 + a_n w_1 = 0 \qquad (4.3)$$

karena persamaan (4.3) merupakan polinomial $f \ \lambda \ = 0$ dimana $f(\lambda)$ adalah suatu polinomial monik, maka $w_1 = 1$, akibatnya

$$w_2 = \lambda_i, w_3 = \lambda_i^2, \ldots, w_n = \lambda_i^{n-1}$$

dengan demikian vektor eigen e_i dapat dituliskan

$$e_i = \ 1, \lambda_i, \lambda_i^2, \ldots, \lambda_i^{n-1} \ ^T.$$

4.2 Vektor Eigen *Generalized*

Selain vektor eigen yang diuraikan dalam penjelasan diatas matriks kompanion juga memiliki vektor eigen yang lain. Vektor eigen ini terjadi jika matriks kompanion tersebut memiliki beberapa nilai eigen yang sama.

Misalkan λ_1 adalah k nilai eigen yang sama dari matriks kompanion C, maka λ_1 memenuhi persamaan berikut:

$$f(\lambda) = 0, f'(\lambda) = 0, \ldots, f^{k-1}(\lambda) = 0 \qquad (4.4)$$

Persamaan $f(\lambda) = 0$ dari persamaan (4.4) diatas ekuivalen dengan persamaan (4.1), dimana $f(\lambda) = 0$ merupakan persamaan karakteristik. Dan untuk persamaan $f'(\lambda) = 0, \ldots, f^{k-1}(\lambda) = 0$ pada persamaan (4.4) tersebut diperoleh dengan mendiferensialkan persamaan $f(\lambda) = 0$ berturut-turut $(k-1)$ kali terhadap λ sedemikian sehingga:

$$\begin{aligned}
Ce(\lambda) &= \lambda e(\lambda) \\
Ce'(\lambda) &= \lambda e(\lambda) + e(\lambda) \\
Ce^2(\lambda) &= \lambda e^2(\lambda) + 2e^{2-1}(\lambda) \\
Ce^3(\lambda) &= \lambda e^3(\lambda) + 3e^{3-1}(\lambda) \\
\vdots \quad & \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\
Ce^j(\lambda) &= \lambda e^j(\lambda) + je^{j-1}(\lambda)
\end{aligned}$$

maka diperoleh:

$$Ce^{(j)}(\lambda) = \lambda e^{(j)}(\lambda) + je^{(j-1)}(\lambda), \; j = 1,2,\ldots,k-1 \qquad (4.5)$$

dengan $e^0(\lambda) = e(\lambda)$.

Kemudian dengan mengalikan persamaan (4.5) dengan $\frac{1}{j!}$ diperoleh:

$$\frac{Ce^{(j)}(\lambda)}{j!} = \frac{\lambda e^{(j)}(\lambda)}{j!} + \frac{e^{(j-1)}(\lambda)}{(j-1)!} \qquad (4.6)$$

sehingga bila $\lambda = \lambda_1$ merupakan k nilai eigen yang sama dari $f(\lambda)$, akan diperoleh k persamaan yaitu:

$$\begin{aligned}
Ce_1 &= \lambda_1 e_1 \qquad (4.7) \\
Ce_2 &= \lambda_1 e_2 + e_1 \\
Ce_3 &= \lambda_1 e_3 + e_2 \\
\vdots \quad & \quad \vdots \quad \vdots \\
Ce_k &= \lambda_1 e_k + e_{k-1}
\end{aligned}$$

dengan $\epsilon_1 = e(\lambda)$ merupakan vektor eigen dan

$$e_{j+1} = \frac{e_j(\lambda_1)}{j!}, j = 1,2, \dots , k - 1 \qquad (4.8)$$

disebut vektor eigen generalized yang bersesuaian dengan λ_1. Perluasan persamaan (4.8) dapat ditulis:

$$\epsilon_1 = [1, \lambda_1, \lambda_1^2, \dots , \lambda_1^{n-1}]$$
$$e_2 = 0,1, 2\lambda_1, \dots , (n - 1)\lambda_1^{n-2}$$
$$e_3 = 0,0,1, \binom{3}{2} \lambda_1, \dots , \binom{n-1}{2} \lambda_1^{n-3}$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$e_k = 0,0,0, \dots , \binom{n-1}{k-1} \lambda_{k-1}^{n-k}$$

yang merupakan vektor eigen yang bebas linier. Vektor ini dapat digunakan untuk mereduksi matriks kompanion C kedalam bentuk normal jordan yang telah diuraikan dalam bab sebelumnya.

4.3 Transformasi Laplace

Definisi 4.2 (Richard Bronson, 2007) Misalkan $f(t)$ terdefenisi untuk $0 \leq t < \infty$, transformasi Laplace dari $f(t)$, yang dituliskan dengan $\mathcal{L}\{f(t)\}$ atau $F(s)$, adalah

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dx$$

asalkan integral ini ada untuk nilai s.

Definisi 4.3 (Richard Bronson, 2007) Jika $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, maka suatu invers transformasi Laplace $F(s)$, dinyatakan dengan $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$.

Berikut ini akan disajikan beberapa fungsi $f(t)$ dalam suatu tabel transformasi Laplace.

Tabel 4.3 Transformasi Laplace

$f(t)$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
1	$\frac{1}{s}\ (s > 0)$
t	$\frac{1}{s^2}\ (s > 0)$
$t^{n-1}\ (n = 1,2,\ldots)$	$\frac{(n-1)!}{s^n}\ (s > 0)$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}\ (s > 0)$
$t^{n-1}e^{at}\ (n = 1,2,\ldots)$	$\frac{(n-1)!}{(s-a)^n}\ (s > 0)$
$\frac{1}{a^2}(a^{et} - 1 - at)$	$\frac{1}{s^2(s-a)}$
$\sin at$	$\frac{a}{s^2+a^2}\ (s > 0)$
$\cos at$	$\frac{s}{s^2+a^2}\ (s > 0)$

4.4 Penyelesaian Persamaan Diferensial Linier Homogen dengan Matriks Kompanion

Perhatikan persamaan diferensial linier orde n berikut ini:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x' + a_nx = 0 \tag{4.9}$$

dengan $x = x(t)$, dengan syarat awal $x(0) = (x, x', x'', \ldots, x^{(n-1)})(0)$ diketahui, dengan mengambil

$$\begin{aligned}
x_1 &= x\\
x_1' &= x_2\\
&\vdots\\
x_{n-1}' &= x_n\\
x_n' &= -a_nx_1 - a_{n-1}x_2 - \cdots - a_1x_n
\end{aligned} \tag{4.10}$$

maka persamaan diferensial (4.9) dapat ditransformasikan ke dalam sistem persamaan diferensial orde satu berikut ini:

$$x't = Cx(t) \tag{4.11}$$

dengan

$x'(t)$ adalah vektor kolom, ditulis $x_1', x_2', \ldots, x_n' \;^T$

$x(t)$ adalah vektor kolom, ditulis $x_1, x_2, \ldots, x_n \;^T$

C adalah matriks kompanion dari polinonial $f(\lambda)$ yang merupakan matriks koefisien dari sistem (4.11).

Dengan mengalikan (4.11) dengan e^{-st} dan mengintegralkannya pada interval $0 \leq t < \infty$ terhadap t sedemikian sehingga:

$$\int_0^{\infty} x'(t)e^{-st}dt = C\int_0^{\infty} x(t)e^{-st}dt$$

diperoleh

$$sx\ s\ - y\ 0\ = Cx(s) \tag{4.12}$$

dengan

$$x\ s\ = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st}dt.$$

Persamaan dari (4.12) dapat ditulis kembali

$$sI - C\ x\ s\ = x\ 0$$

$$x(s) = \ sI - C\ ^{-1}x(0) \tag{4.13}$$

Dengan mensubsitusikan $C = BJB^{-1}$ dari persamaan $B^{-1}AB = J$ ke dalam persamaan (4.13), maka diperoleh

$$x\ s\ = \ sI - BJB^{-1}\ ^{-1}x\ 0$$

$$x\ s\ = \{B\ sI - J\ B^{-1}\}^{-1}x\ 0$$

$$x\ s\ = B(sI - J)^{-1}B^{-1}x\ 0 \tag{4.14}$$

persamaan (4.14) dapat ditulis kembali menjadi

$$x_h\ s\ = B(sI - J)^{-1}B^{-1}x\ 0 \tag{4.15}$$

penyelesaian persamaan diferensial (4.9) diperoleh dengan mengambil invers transformasi Laplace.

4.5 Penyelesaian Persamaan Diferensial Linier Non Homogen dengan Matriks Kompanion

Berdasarkan penyelesaian persamaan diferensial linier homogen dengan matriks kompanion yang telah diuraikan sebelumnya, maka dengan dengan menambahkan vektor $g = (0, 0, \ldots, 0, G(s))^T$ pada ruas kanan persamaan (4.14) dimana $G(s)$ transformasi Laplace pada $g(t)$, maka

$$x(s) = (sI - C)^{-1}\{x(0) + g\} \tag{4.15}$$

karena $x(0)$ pada persamaan diatas hanya untuk solusi homogen, maka penyelesaian khusus dari persamaan (4.15) adalah

$$x_p(s) = (sI - C)^{-1} g \tag{4.16}$$

dengan mensubsitusikan $C = BJB^{-1}$ kedalam persamaan (4.15), diperoleh

$$x_p(s) = (sI - BJB^{-1})^{-1}\, g(t)$$

$$x_p(s) = (B(sI - J)B^{-1})^{-1} g(t)$$

$$x_p(s) = B(sI - J)^{-1} B^{-1} g(t) \tag{4.17}$$

dengan mengambil invers transformasi Laplace pada persamaan (4.17) maka penyelesaian khusus persamaan diferensial linier homogen dapat diperoleh.

4.6 Aplikasi Matriks Kompanion Pada Penyelesain Sistem Persamaan Diferensial Linier Non Homogen

Pada uraian sebelumnya telah dijabarkan bahwa matriks kompanion dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial linier homogen dan non homogen pada sub bab berikut ini akan diuraikan pula mengenai aplikasi matriks kompanion pada penyelesaian sistem persamaan diferensial linier non homogen.

Contoh 4.1

Selesaikanlah sistem persamaan diferensial linier non homogen berikut ini:

$x_1'' + 2x_1' + x_1 + 2x_2 + 3x_3 = t^2$................(1)

$4x_1 + 2x_2' + 2x_3' = 0$...................................(2)

$7x_1' - 7x_1 + x_3 = 0$....................................(3)

dengan syarat awal

$$x_1(0) = 0, x_1'(0) = 1, x_1''(0) = -1, x_2(0) = -7, x_3(0) = 10$$

Penyelesaian:

Dengan menggunakan operator D pada sistem persamaan diferensial non homogen diatas maka diperoleh:

$$D^2x_1 + 2D^1x_1 + x_1 + 2x_2 + 3x_3 = t^2 \text{ .... (1)}$$

$$4x_1 + 2D^1x_2 + 2D^1x_3 = 0 \text{ .... (2)}$$

$$7D^1x_1 - 7x_1 + x_3 = 0 \text{ .... (3)}$$

untuk mengeleminasi x_2 pada (1) dan (2) dapat dilakukan dengan mengalikan D pada (1) , diperoleh

$$D^3x_1 + 2D^2x_1 + Dx_1 - 4x_1 + Dx_3 = 2t \text{ .... (4)}$$

kalikan operator D pada (3), sehingga dapat mengeleminasi x_3 pada persamaan (4) dan (3), diperoleh persamaan diferensial linier non homogen untuk x_1

$$D^3x_1 - 5D^2x_1 + 8Dx_1 - 4x_1 = 2t$$

karena persamaan di atas merupakan persamaan diferensial linier non homogen, maka terlebih dahulu akan diselesaikan persamaan diferensial linier homogennya, sehingga

$$D^3x_1 - 5D^2x_1 + 8Dx_1 - 4x_1 = 0$$

persamaan karakteristik dari persamaan diferensial linier homogen di atas adalah:

$$\lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 = 0$$

maka bentuk matriks kompanionnya adalah

$$C = \begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -8 & 5 \end{matrix}$$

selanjutnya akan ditentukan nilai eigen dari matriks kompanionnya yaitu:

$$det\ C - \lambda I = 0$$

$$det \begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -8 & 5 \end{matrix} - \begin{matrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{matrix} = \begin{matrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 4 & -8 & 5-\lambda \end{matrix} = 0$$

$$-\lambda \quad -\lambda \quad 5-\lambda \quad + 4 - \quad 8\lambda \quad = 0$$

$$\lambda - 1 \quad \lambda - 2 \quad \lambda - 2 \quad = 0$$

maka diketahui nilai eigennya adalah $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \lambda_3 = 2$.

Selanjutnya akan ditentukan vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai λ, yaitu:

$$e\ \lambda \ = (1, \lambda, \lambda^2, \dots, \lambda^{n-1})$$

$\lambda_1 = 1$ □ $e\ 1 \ = \ 1,1,1^2 \ = (1,1,1)$

$\lambda_2 = 2$ □ $e\ 2 \ = \ 1,2,2^2 \ = (1,2,4)$

karena $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$ maka vektor eigen untuk λ_3 akan menjadi vektor eigen generalized, sehingga

$\lambda_3 = 2$ □ $e_3' = \ 0,1,2(2) \ = (0,1,4)$

maka dapat ditulis kembali kedalam matriks

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

selanjutnya akan ditentukan B^{-1}, dengan menggunakan OBE maka diperoleh

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 1 \\ -3 & 4 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

untuk matriks normal Jordannya dapat dicari dengan menggunakan persamaan

$$J = B^{-1}CB$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & -4 & 1 \\ -3 & 4 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -8 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

selanjutnya dapat ditentukan nilai $(sI - J)^{-1}$, namun terlebih dahulu akan ditentukan nilai $sI - J$

$$sI - J = \begin{pmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} s-1 & 0 & 0 \\ 0 & s-2 & -1 \\ 0 & 0 & s-2 \end{pmatrix}$$

kemudian dengan menggunakan bantuan program maple diperoleh nilai untuk $(sI - J)^{-1}$, yaitu

$$(sI - J)^{-1} = \begin{pmatrix} (s-1)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & (s-2)^{-1} & (s-2)^{-2} \\ 0 & 0 & (s-2)^{-1} \end{pmatrix}$$

dengan memasukkan nilai-nilai matriks diatas kedalam persamaan

$$x_h(s) = B(sI - J)^{-1}B^{-1}x(0)$$

sedemikian sehingga diperoleh

$$x_h(s) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (s-1)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & (s-2)^{-1} & (s-2)^{-2} \\ 0 & 0 & (s-2)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -4 & 1 \\ -3 & 4 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$x_h(s) = \begin{bmatrix} -5(s-1)^{-1} + 5(s-2)^{-1} - 4(s-2)^{-2} \\ -5(s-1)^{-1} + 6(s-2)^{-1} - 8(s-2)^{-2} \\ -5(s-1)^{-1} + 4(s-2)^{-1} - 16(s-2)^{-2} \end{bmatrix}$$

dengan mengambil invers transformasi Laplace pada $x_h(s)$ maka:

$$x_h(t) = \begin{bmatrix} -5e^{t} + 5e^{2t} - 4te^{2t} \\ -5e^{t} + 6e^{2t} - 8te^{2t} \\ -5e^{t} + 4e^{2t} - 16te^{2t} \end{bmatrix}$$

maka penyelesaian diferensial linier homogennya adalah

$$x_h(t) = -5e^{t} + 5e^{2t} - 4te^{2t}$$

penyelesaian dari $x_h(t)$ yang di ambil adalah pada baris pertama karena pada baris kedua dan ketiga merupakan turunan pertama dan kedua dari $x_h(t)$.

Selanjutnya dicari kembali untuk penyelesaian persamaan diferensial linier non homogennya dengan menggunakan persamaan

$$x_p(s) = B(sI - J)^{-1}B^{-1}g(t)$$

$$x_p(s) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (s-1)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & (s-2)^{-1} & (s-2)^{-2} \\ 0 & 0 & (s-2)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -4 & 1 \\ -3 & 4 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2t \end{bmatrix}$$

$$x_p(s) = \begin{bmatrix} (s-1)^{-1} & (s-2)^{-1} & (s-2)^{-2} \\ (s-1)^{-1} & 2(s-2)^{-1} & 2(s-2)^{2} + (s-2)^{-1} \\ (s-1)^{-1} & 4(s-2)^{-1} & 4(s-2)^{2} + 4(s-2)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2t \\ -2t \\ 2t \end{bmatrix}$$

$$x_p(t) = \begin{bmatrix} e^{t} & e^{2t} & te^{2t} \\ e^{t} & 2e^{2t} & 2te^{2t} + e^{2t} \\ e^{t} & 4e^{2t} & 4te^{2t} + 4e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2t \\ -2t \\ 2t \end{bmatrix}$$

sehingga

$$x_p(t) = \begin{bmatrix} e^{t} & e^{2t} & te^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2t \\ -2t \\ 2t \end{bmatrix}$$

$$x_p(t) = 2e^{t} - 2t - 2 - \left(\frac{1}{2}e^{2t} - t - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}te^{2t} + \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}e^{2t} + \frac{1}{2}\right)$$

$$x_p(t) = 2e^{t} - e^{2t} - \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}te^{2t} - 1$$

penyelesaian dari $x_p\ t$ yang diambil juga baris pertama karena pada baris kedua dan ketiga merupakan turunan pertama dan kedua $x_p\ t$.

Maka solusi untuk persamaan diferensial non homogen adalah:

$$x_h\ t + x_p\ t = -5e^t + 5e^{2t} - 4te^{2t} + 2e^t - e^{2t} - \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}te^{2t} - 1$$

$$= -3e^t + 4e^{2t} - \frac{7}{2}te^{2t} - \frac{1}{2}t - 1$$

karena pada persamaan $D^3x_1 - 5D^2x_1 + 8Dx_1 - 4x_1 = 2t$ yang ditentukan adalah nilai untuk x_1 maka solusi dari $x_h\ t + x_p\ t = x_1$, sehingga dapat dituliskan kembali

$$x_1 = -3e^t + 4e^{2t} - \frac{7}{2}te^{2t} - \frac{1}{2}t - 1$$

untuk mencari nilai x_1' dengan menjumlahkan $x_h{}'\ t + x_p'(t)$ sehingga

$$x_1' = -3e^t + \frac{9}{2}e^{2t} - 7te^{2t} - \frac{1}{2}$$

kemudian untuk mencari nilai x_1'' dengan menjumlahkan $x_h{}''\ t + x_p''(t)$ sehingga

$$x_1'' = -3e^t + 2e^{2t} - 14te^{2t}$$

setelah didapat nilai dari x_1, substitusikan ke dalam x_1 sistem persamaan untuk mendapatkan nilai x_2 dan x_3

$x_1'' + 2x_1' + x_1 + 2x_2 + 3x_3 = t^2$ ....(1)

$4x_1 + 2x_2' + 2x_3' = 0$ ....(2)

$7x_1' - 7x_1 + x_3 = 0$................................(3)

untuk x_3 substitusikan nilai x_1 ke dalam persamaan (3)

$7x_1' - 7x_1 + x_3 = 0$................................(3)

sehingga diperoleh

$$x_3 = -\frac{7}{2}e^{2t} + \frac{49}{2}te^{2t} - \frac{7}{2}t - \frac{7}{2}$$

untuk x_2 substitusikan nilai x_1 ke dalam persamaan (1)

$x_1'' + 2x_1' + x_1 + 2x_2 + 3x_3 = t^2$ ....(1)

sehingga diperoleh

$$x_2 = \frac{t^2}{2} + 6e^t - \frac{9}{4}e^{2t} - 21te^{2t} + \frac{11}{2}t + \frac{25}{4}$$

maka penyelesaiannya adalah:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3e^t + 4e^{2t} - \frac{7}{2}te^{2t} - \frac{1}{2}t - 1 \\ \frac{t^2}{2} + 6e^t - \frac{9}{4}e^{2t} - 21te^{2t} + \frac{11}{2}t + \frac{25}{4} \\ -\frac{7}{2}e^{2t} + \frac{49}{2}te^{2t} - \frac{7}{2}t - \frac{7}{2} \end{bmatrix}.$$

Contoh 4.2

Diberikan sistem persamaan diferensial linier non homogen berikut ini:

$x_1' - x_1 - x_2 = t^2$ ....(1)

$x_2' - 4x_1 - x_2 + x_3 = 0$ ....(2)

$-4x_1 + x_3' - x_4 = -t$ ....(3)

$4x_1' - 4x_1 + x_4' = t + 1$ ....(4)

Carilah penyelesaian dari sistem persamaan di atas, dengan syarat awal:

$x_1(0) = 0$	$x_2(0) = -\frac{1}{2}$	$x_4(0) = 1$
$x_1'(0) = 0$	$x_2'(0) = -\frac{1}{12}$	
$x_1''(0) = 0$	$x_3(0) = 0$	
$x_1'''(0) = 1$	$x_3'(0) = 1$	

Penyelesaian:

Dengan menggunakan operator *D* pada sistem persamaan diferensial linier non homogen di atas, maka dapat dituliskan kembali

$Dx_1 - x_1 - x_2 = t^2$ ....(1)

$Dx_2 - 4x_1 - x_2 + x_3 = 0$ ....(2)

$-4x_1 + Dx_3 - x_4 = -t$ ....(3)

$4Dx_1 - 4x_1 + Dx_4 = t + 1$ .....(4)

pertama akan dieleminasi terlebih dahulu persamaan (1) dan (2), dengan mengalikan $(D - 1)$ pada persamaan (1) maka x_2 dapat dieleminasi, sehingga diperoleh

$D^2x_1 - 2D^1x_1 - 3x_1 + x_3 = 2t - t^2$ ....(5)

setelah diperoleh persamaan (5), selanjutnya eleminasi persamaan (5) dan (3) diperoleh persamaan diferensial linier non homogen untuk x_1

$$D^3x_1 - 2D^2x_1 - 3Dx_1 + 4x_1 - x_3 = 2 - t \quad .....(6)$$

kemudian eleminasi persamaan (6) dan (4), diperoleh

$$D^4x_1 - 2D^3x_1 - 3D^2x_1 + 8Dx_1 - 4x_1 = t$$

persamaan diatas adalah persamaan diferensial linier non homogen untuk x_1, untuk menyelesaikan persamaan diferensial linier non homogen diatas maka terlebih dahulu diselesaikan persamaan diferensial linier homogennya, sehingga persamaan diatas dapat ditulis kembali menjadi

$$D^4x_1 - 2D^3x_1 - 3D^2x_1 + 8Dx_1 - 4x_1 = 0 .$$

Selanjutnya persamaan diatas dapat ditulis kedalam bentuk persamaan karakteristik

$$\lambda^4 - 2\lambda^3 - 3\lambda^2 + 8\lambda - 4 = 0$$

maka matriks kompanionnya adalah

$$C = \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & -8 & 3 & 2 \end{matrix}$$

selanjutnya ditentukan nilai eigen dari matriks kompanion di atas, yaitu:

$$det\ C - \lambda I = 0$$

$$det \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & -8 & 3 & 2 \end{matrix} - \begin{matrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{matrix} = \begin{matrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 4 & -8 & 3 & 2-\lambda \end{matrix} = 0$$

maka diperoleh determinannya yaitu:

$$\lambda + 2 \quad \lambda - 2 \quad \lambda - 1 \ (\lambda - 1) = 0$$

sehingga di peroleh $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = \lambda_4 = 1.$

Maka vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigennya adalah

$$\lambda_1 = -2 \Rightarrow e\ -2 = \ 1, -2, -2^2, -2^3 \ = (1, -2, 4, -8)$$

$$\lambda_2 = 2 \Rightarrow e\ 2 = \ 1, 2, 2^2, 2^3 \ = (1,2,4,8)$$

$$\lambda_3 = 1 \Rightarrow e\ 1 = \ 1, 1, 1^2, 1^3 \ = (1,1,1,1)$$

$$\lambda_4 = 1 \Rightarrow e'\ 1 = \ 0, 1, 2\ 1\ ,\ 4 - 1\ 1^{3-2} \ = (0,1,2,3)$$

sehingga dapat ditulis kembali dalam matriks

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 1 & 2 \\ -8 & 8 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

selanjutnya dengan bantuan program maple ditentukan nilai untuk B^{-1}

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/18 & -5/36 & 1/9 & -1/36 \\ 1/2 & -3/4 & 0 & 1/4 \\ 4/9 & 8/9 & -1/9 & -2/9 \\ -4/3 & 4/3 & 1/3 & -1/3 \end{bmatrix}$$

maka matriks normal Jordannya adalah

$$J = B^{-1}CB$$

$$= \begin{bmatrix} 1/18 & -5/36 & 1/9 & -1/36 \\ 1/2 & -3/4 & 0 & 1/4 \\ 4/9 & 8/9 & -1/9 & -2/9 \\ -4/3 & 4/3 & 1/3 & -1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & -8 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 1 & 2 \\ -8 & 8 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

selanjutnya ditentukan nilai $sI - J$

$$sI - J = \begin{bmatrix} (s+2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (s-2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (s-1) & -1 \\ 0 & 0 & 0 & (s-1) \end{bmatrix}$$

kemudian dengan bantuan program maple ditentukan nilai $(sI - J)^{-1}$, sehingga

$$(sI - J)^{-1} = \begin{bmatrix} (s+2)^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (s-2)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (s-1)^{-1} & (s-1)^{-2} \\ 0 & 0 & 0 & (s-1)^{-1} \end{bmatrix}$$

dengan memasukkan nilai-nilai matriks diatas kedalam persamaan

$$x_h(s) = B(sI - J)^{-1}B^{-1}x(0)$$

$$x_h(s) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 1 & 2 \\ -8 & 8 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (s+2)^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (s-2)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (s-1)^{-1} & (s-1)^{-2} \\ 0 & 0 & 0 & (s-1)^{-1} \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 1/18 & -5/36 & 1/9 & -1/36 \\ 1/2 & -3/4 & 0 & 1/4 \\ 4/9 & 8/9 & -1/9 & -2/9 \\ -4/3 & 4/3 & 1/3 & -1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

sedemikian sehingga diperoleh

$$x_h(s) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{36}(s+2)^{-1} + \frac{1}{4}(s-2)^{-1} - \frac{2}{9}(s-1)^{-1} - \frac{1}{3}(s-1)^{-2} \\ \frac{1}{18}(s+2)^{-1} + \frac{1}{2}(s-2)^{-1} - \frac{5}{9}(s-1)^{-1} - \frac{1}{3}(s-1)^{-2} \\ -\frac{1}{9}(s+2)^{-1} + (s-2)^{-1} - \frac{8}{9}(s-1)^{-1} - \frac{1}{3}(s-1)^{-2} \\ \frac{2}{9}(s+2)^{-1} + 2(s-2)^{-1} - \frac{11}{9}(s-1)^{-1} - \frac{1}{3}(s-1)^{-2} \end{bmatrix}$$

dengan mengambil invers transformasi Laplace pada $x_h(s)$ maka

$$x_h(t) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{36}e^{-2t} + \frac{1}{4}e^{2t} - \frac{2}{9}e^{t} - \frac{1}{3}te^{t} \\ \frac{1}{18}e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{2t} - \frac{5}{9}e^{t} - \frac{1}{3}te^{t} \\ -\frac{1}{9}e^{-2t} + e^{2t} - \frac{8}{9}e^{t} - \frac{1}{3}te^{t} \\ \frac{2}{9}e^{-2t} + 2e^{2t} - \frac{11}{9}e^{t} - \frac{1}{3}te^{t} \end{bmatrix}$$

maka penyelesain persamaan diferensial linier homogennya adalah

$$x_h(t) = -\frac{1}{36}e^{-2t} + \frac{1}{4}e^{2t} - \frac{2}{9}e^{t} - \frac{1}{3}te^{t}.$$

Penyelesaian $x_h(t)$ yang di ambil adalah pada baris pertama karena pada baris kedua, ketiga dan keempat merupakan turunan pertama, kedua dan ketiga dari $x_h(t)$.

Selanjutnya dicari penyelesaian persamaan diferensial linier non homogennya dengan persamaan

$$x_p(s) = B(sI - J)^{-1}B^{-1}g(t)$$

$$x_p(s) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 1 & 2 \\ -8 & 8 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (s+2)^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (s-2)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (s-1)^{-1} & (s-1)^{-2} \\ 0 & 0 & 0 & (s-1)^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1/18 & -5/36 & 1/9 & -1/36 \\ 1/2 & -3/4 & 0 & 1/4 \\ 4/9 & 8/9 & -1/9 & -2/9 \\ -4/3 & 4/3 & 1/3 & -1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ t \end{bmatrix}$$

sedemikian sehingga diperoleh

$$x_p(s) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{36}(s+2)^{-1} + \frac{1}{4}(s-2)^{-1} - \frac{2}{9}(s-1)^{-1} - \frac{1}{3}(s-1)^{-2} \\ \frac{1}{18}(s+2)^{-1} + \frac{1}{2}(s-2)^{-1} - \frac{5}{9}(s-1)^{-1} - \frac{1}{3}(s-1)^{-2} \\ -\frac{1}{9}(s+2)^{-1} + (s-2)^{-1} - \frac{8}{9}(s-1)^{-1} - \frac{1}{3}(s-1)^{-2} \\ \frac{2}{9}(s+2)^{-1} + 2(s-2)^{-1} - \frac{11}{9}(s-1)^{-1} - \frac{1}{3}(s-1)^{-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ t \end{bmatrix}$$

dengan mengambil invers transformasi Laplace, maka diperoleh

$$x_p(t) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{36}t(e^{-2t}) + \frac{1}{4}t(e^{2t}) - \frac{2}{9}t(e^{t}) - \frac{1}{3}t(te^{t}) \\ \frac{1}{18}t(e^{-2t}) + \frac{1}{2}t(e^{2t}) - \frac{5}{9}t(e^{t}) - \frac{1}{3}t(te^{t}) \\ -\frac{1}{9}t(e^{-2t}) + t(e^{2t}) - \frac{8}{9}t(e^{t}) - \frac{1}{3}t(te^{t}) \\ \frac{2}{9}t(e^{-2t}) + 2t(e^{2t}) - \frac{11}{9}t(e^{t}) - \frac{1}{3}t(te^{t}) \end{bmatrix}$$

$$x_p(t) = -\frac{1}{36}t(e^{-2t}) + \frac{1}{4}t(e^{2t}) - \frac{2}{9}t(e^{t}) - \frac{1}{3}t(te^{t})$$

$$x_p(t) = -\frac{1}{144}e^{-2t} + \frac{1}{16}e^{2t} + \frac{4}{9}e^{t} - \frac{1}{3}te^{t} - \frac{1}{4}t - \frac{1}{2}$$

sehingga solusi persamaan diferensial linier non homogen

$$x_h(t) + x_p(t) = -\frac{5}{144}e^{-2t} + \frac{5}{16}e^{2t} + \frac{2}{9}e^{t} - \frac{2}{3}te^{t} - \frac{1}{4}t - \frac{1}{2}$$

karena yang ditentukan nilai x_1 dari persamaan

$$D^4x_1 - 2D^3x_1 - 3D^2x_1 + 8Dx_1 - 4x_1 = t$$

maka solusi dari $x_h(t) + x_p(t) = x_1$, sehingga

$$x_1 = -\frac{5}{144}e^{-2t} + \frac{5}{16}e^{2t} + \frac{2}{9}e^{t} - \frac{2}{3}te^{t} - \frac{1}{4}t - \frac{1}{2}$$

setelah diperoleh nilai dari x_1, maka substitusikan k edalam sistem persamaan

$x_1' - x_1 - x_2 = t^2$ ....(1)

$x_2' - 4x_1 - x_2 + x_3 = 0$ ....(2)

$-4x_1 + x_3' - x_4 = -t$ ....(3)

$4x_1' - 4x_1 + x_4' = t + 1$ ....(4)

untuk nilai x_2 substitusikan ke dalam persamaan (1)

$x_1' - x_1 - x_2 = t^2$ ....(1)

sehingga

$$x_2 = \frac{5}{48}e^{-2t} + \frac{5}{16}e^{2t} - \frac{2}{3}e^{t} - t^2 - \frac{1}{4}t - \frac{1}{4}$$

selanjutnya untuk x_3 substitusikan ke dalam persamaan (2)

$x_2' - 4x_1 - x_2 + x_3 = 0$ ....(2)

sehingga diperoleh

$$x_3 = \frac{25}{144}e^{-2t} + \frac{15}{16}e^{2t} + \frac{8}{9}e^{t} - \frac{8}{3}te^{t} - t^2 + \frac{5}{4}t - 2$$

untuk x_4 substitusikan ke dalam persamaan (3)

$-4x_1 + x_3' - x_4 = -t$ ....(3)

maka diperoleh

$$x_4 = -\frac{5}{24}e^{-2t} - \frac{5}{8}e^{2t} - \frac{8}{3}e^{t} + \frac{13}{4}$$

maka penyelesaiannya adalah

$$\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{matrix} = \begin{matrix} -\frac{5}{144}e^{-2t} + \frac{5}{16}e^{2t} + \frac{2}{9}e^{t} - \frac{2}{3}te^{t} - \frac{1}{4}t - \frac{1}{2} \\ \frac{5}{48}e^{-2t} + \frac{5}{16}e^{2t} - \frac{2}{3}e^{t} - t^2 - \frac{1}{4}t - \frac{1}{4} \\ \frac{25}{144}e^{-2t} + \frac{15}{16}e^{2t} + \frac{8}{9}e^{t} - \frac{8}{3}te^{t} - t^2 + \frac{5}{4}t - 2 \\ -\frac{5}{24}e^{-2t} - \frac{5}{8}e^{2t} - \frac{8}{3}e^{t} + \frac{13}{4} \end{matrix} .$$

BAB V
PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan yang telah diuraikan pada bab IV maka dapat diambil kesimpulan bahwa aplikasi matriks kompanion dapat dilakukan bila sistem persamaan diferensial linier non homogen terlebih dahulu dieleminasi dengan menggunakan operator D, dan didapat suatu persamaan diferensial linier non homogen. Dengan bantuan matriks kompanion dan beberapa operasi matriks yang dibutuhkan maka diperoleh penyelesaian untuk sistem persamaan diferensial linier non homogen.

Sehingga, berdasarkan contoh sistem persamaan diferensial linier non homogen yang diberikan pada bab pembahasan yaitu:

$x_1'' + 2x_1' + x_1 + 2x_2 + 3x_3 = t^2$.........(1)

$4x_1 + 2x_2' + 2x_3' = 0$............................(2)

$7x_1' - 7x_1 + x_3 = 0$ ....(3)

dengan syarat awal

$$x_1(0) = 0, x_1'(0) = 1, x_1''(0) = -1, x_2(0) = -7, x_3(0) = 10$$

maka diperoleh penyelesaian adalah sebagai berikut:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3e^t + 4e^{2t} - \frac{7}{2}te^{2t} - \frac{1}{2}t - 1 \\ \frac{t^2}{2} + 6e^t - \frac{9}{4}e^{2t} - 21te^{2t} + \frac{11}{2}t + \frac{25}{4} \\ -\frac{7}{2}e^{2t} + \frac{49}{2}te^{2t} - \frac{7}{2}t - \frac{7}{2} \end{pmatrix}.$$

Sedangkan untuk sistem persamaan diferensial linier non homogen yang kedua yaitu:

$x_1' - x_1 - x_2 = t^2$ ....(1)

$x_2' - 4x_1 - x_2 + x_3 = 0$ ....(2)

$-4x_1 + x_3' - x_4 = -t$ ....(3)

$4x_1' - 4x_1 + x_4' = t + 1$ ....(4)

dengan syarat awal:

$$x_1(0) = 0 \qquad x_2(0) = -\frac{1}{2} \qquad x_4(0) = 1$$

$$x_1'(0) = 0 \qquad x_2'(0) = -\frac{1}{12}$$

$$x_1''(0) = 0 \qquad x_3(0) = 0$$

$$x_1'''(0) = 1 \qquad x_3'(0) = 1$$

sehingga diperoleh penyelesaian adalah sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{144}e^{-2t} + \frac{5}{16}e^{2t} + \frac{2}{9}e^{t} - \frac{2}{3}te^{t} - \frac{1}{4}t - \frac{1}{2} \\ \frac{5}{48}e^{-2t} + \frac{5}{16}e^{2t} - \frac{2}{3}e^{t} - t^2 - \frac{1}{4}t - \frac{1}{4} \\ \frac{25}{144}e^{-2t} + \frac{15}{16}e^{2t} + \frac{8}{9}e^{t} - \frac{8}{3}te^{t} - t^2 + \frac{3}{4}t - 2 \\ -\frac{5}{24}e^{-2t} - \frac{5}{8}e^{2t} - \frac{8}{3}e^{t} + t + \frac{11}{4} \end{bmatrix}.$$

5.2 Saran

Penulis hanya membahas mengenai sistem persamaan diferensial linier non homogen untuk 3 persamaan dengan 3 variabel dan sistem persamaan diferensial linier non homogen untuk 4 persamaan dengan 4 variabel pada tugas akhir ini. Bagi pembaca yang tertarik untuk melanjutkan penelitian ini dapat mencari dengan sistem persamaan diferensial linier non homogen yang lebih tinggi.

DAFTAR PUSTAKA

Anton, Howard, *Aljabar Linear Elementer*, Erlangga, Jakarta. 1998.

Ayres, Frank and J.C. Ault, *Seri Terjemahan Buku Schaum Persamaan Diferensial dalam Satuan SI Metric*, Erlangga, Jakarta. 1999.

Ayres, Frank, *Seri Terjemahan Buku Schaum Matriks (Versi SI/Metric)*, Erlangga, Jakarta. 1999.

Bronson, Richard and Gabriel Costa, Seri Terjemahan *Schaum's Outline* Persamaan Diferensial, Erlangga, Jakarta. 2007.

Brand, Louis, *The Companion Matriks and Its Properties*, The American Math.Monthly, 71:629-634,1964.

Brand, Louis, *Application Of The Companion Matrix*, The American Math.Monthly, 75:146-128, 1968.

Jacob, Bill, *Linear Algebra*, W.H. Freeman and Company New York. 1990.

Supranto, J, *Pengantar Matriks*, Fakultas Ekonomi Universitas Indonesia, Jakarta. 1992.

Spiegel, M.R, *Seri Terjemahan Buku Schaum Transformasi Laplace*, Erlangga, Jakarta, 1999.

Zurnida, R, *Penyelesaian Persamaan Diferensial Linier Non Homogen dengan Matriks Companion*, Universitas Riau, 2009.